

地球力学レポート課題 1

05-242628 三田村彰大

November 24, 2025

問 1

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 慣性 (E) J_2 (F) 西 (G) $h = H + N$ (H) 正規重力

問 2

まず、外側のポテンシャルは

$$U(r, \theta, \phi) = \sum_n \frac{1}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \phi) \quad (1)$$

となる。ただし、 $Y_n(\theta, \phi)$ は球面調和関数

$$\sum_{m=0}^n (a_{nm} C_{nm}(\theta, \phi) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \phi)) \quad (2)$$

である。この時、境界での法線微分は

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} = - \sum_n (n+1) \frac{1}{R^{n+2}} Y_n(\theta, \phi) \quad (3)$$

となる。今、与えられたノイマン境界条件の球面調和展開は

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} = \sum_n G_n(\theta, \phi) \quad (4)$$

であるから、(3) (4) 式を比べれば各 n に対して

$$-(n+1) \frac{1}{R^{n+2}} Y_n(\theta, \phi) = G_n(\theta, \phi) \quad (5)$$

となる。よってこれを解いて式 (1) に代入すれば、

$$U(r, \theta, \phi) = - \sum_n \frac{R}{n+1} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} G_n(\theta, \phi) \quad (6)$$

として答えを得る。

問3

(1)

講義資料では、

$$-\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} T = \Delta g \quad (7)$$

まで与えられていた。ここに球近似を適用すれば、重力 γ について

$$\gamma \approx \frac{GM}{r^2}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial h} \approx \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -\frac{2GM}{r^3} = -\frac{2}{r}\gamma \quad (8)$$

のように計算でき、さらに

$$\frac{\partial T}{\partial h} \approx \frac{\partial T}{\partial r} \quad (9)$$

と考えることができるから、(7) 式は

$$-\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T = \Delta g \quad (10)$$

となる。よって求める係数は

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -\frac{2}{r} \quad (11)$$

となる。

(2)

改めて、今解くべき式は

$$\begin{cases} \nabla^2 T(r, \theta, \phi) = 0 & (12a) \\ -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T = \Delta g \Big|_{r=R} & (12b) \end{cases}$$

である。特に今、

$$\begin{cases} T(r, \theta, \phi) = \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} F_n(\theta, \phi) & (13a) \\ \Delta g(\theta, \phi) = \sum_n G_n(\theta, \phi) & (13b) \end{cases}$$

のような調和級数展開を考える。この時、(13a) 式より $T(r, \theta, \phi)$ はラプラス方程式の一般解であるから (12a) は満たされ、よって後は (12b) を満たすかどうか考えれば良い。

今、(12b) 式に (13a) (13b) を代入すれば、

$$\sum_n \frac{n+1}{R} F_n(\theta, \phi) - \frac{2}{R} \sum_n F_n(\theta, \phi) = \sum_n G_n(\theta, \phi) \quad (14)$$

となるので、

$$F_n(\theta, \phi) = \frac{R}{n-1} G_n(\theta, \phi) \quad (15)$$

となる。

(3)

今、授業で与えられたスカラー関数の球面調和展開に関する公式を (13b) 式に用いれば、

$$G_n(\theta, \phi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_S \Delta g(\theta', \phi') P_n(\cos(\psi)) d\Omega' \quad (16)$$

を得る。

(4)

よって (15) (16) 式を (13a) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned} T(r, \theta, \phi) &= \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{R}{n-1} \frac{2n+1}{4\pi} \int_S \Delta g(\theta', \phi') P_n(\cos \psi) d\Omega' \\ &= \frac{R}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{\theta'=0}^{\pi} \left\{ \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \right\} \Delta g(\theta', \phi') (\sin \theta' d\theta') \end{aligned} \quad (17)$$

とっている。よってこれを問題文中の式と見比べて、

$$S(r, \psi) = \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \quad (18)$$

を得る。

(5)

$R = r$ で、(4) で求めた式は

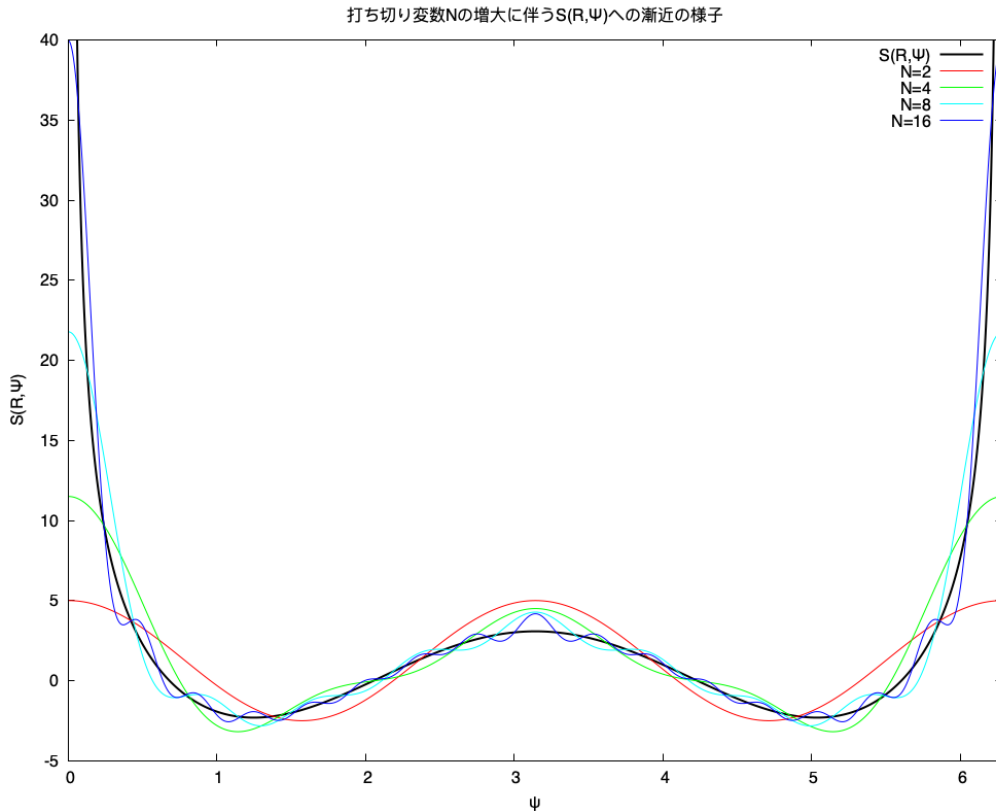
$$S(R, \psi) = \sum_{n \geq 2} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \quad (19)$$

となる。また講義資料より、

$$S(R, \psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (20)$$

である。よって今、(19) で表される級数の収束先が (20) となっているから、(4) で導いた式の n の上限 (打ち切り次数) を増加させていくことで、(4) で導いた式は講義資料の $S(R, \psi)$ に漸近していくことが予想される。

実際に図示すると以下のような様子。



問4

(1)

以下、 $h = 1\text{cm}$ とする。球の中心からの距離を r としたとき、正規重力は $\gamma = -GM/r^2$ であり、よってフーリエ勾配に伴う重力変化は

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} h = -\frac{2GM}{r^3} h \quad (21)$$

となる。よってここに、 $GM = 3986005.0 \times 10^8 [\text{m}^3\text{s}^{-2}]$ 、 $6371.0 \times 10^3 [\text{m}]$ 、 $h = 0.01 [\text{m}]$ などを代入すれば、

$$\Delta g_F = -3.082 [\text{microGal/cm}] \quad (22)$$

を得る。

(2)

今、円筒座標系 (r, θ, z) の原点に重力計があり、 $z = -h \sim z = 0$ に密度 ρ の無限平板が存在すると考える。この時、対称性から重力は z 下向きであると考えてよく、よって円板中の微小体積の重力への寄与 δg_z を積分すればよい。よって、重力系で観測される z 方向の重力は

$$\begin{aligned} g_z &= \int \delta g_z \\ &= \int \frac{G\rho dV}{r^2 + z^2} \times \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ &= \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-h}^0 G\rho \cdot \frac{rz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr d\theta dz \\ &= 2\pi G\rho \int_{-h}^0 \left[\frac{-z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_{r=0}^{r=\infty} dz \\ &= 2\pi G\rho \int_{-h}^0 \frac{z}{|z|} dz \\ &= -2\pi G\rho h \end{aligned} \tag{23}$$

となる。よって、 $G = 6.6743 \times 10^{-11} [\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}]$ 、 $\rho = 2670 [\text{kg m}^{-3}]$ などを代入すれば、

$$\Delta g_B = +1.119 [\text{microGal/cm}] \tag{24}$$

を得る。

(3)

(2)(3) の結果から、地殻が 1cm 隆起した時の重力変化は

$$\Delta g_F + \Delta g_B = -1.963 [\text{microGal/cm}] \tag{25}$$

である。

(4)

標高の変化の図を見ると、おおよそ $5.5 [\text{cm/year}]$ のペースで標高が下がり続けていることがわかる。よって (3) の結果を用いれば、標高の変化によって重力は $1.963 \times 5.5 \approx 11 \text{ microGal/year}$ のペースで増加し続けているはずである。すなわち、重力の変化のグラフから 11 microGal/year の重力増加分を差引くという補正を行わなければならない。

この補正を行うと、今重力の変化は*1

*1 爆発を無視する

- 87年においては -150microGal/year のペースで激しく重力が減少している
- 88年から89年にかけて重力の変化はおとなしくなり、89年以降は 10microGal/year のペースで増加している

というようにまとめることができる。

よって、噴火に続く形で激しく重力が減少するイベントが発生し、その後緩やかに重力は増加に転じたと言え、これは噴火に伴うマグマの流出とその後の貫入によって説明できると思われる。すなわち、噴火に伴い一気にマグマ溜まりから質量が失われ重力が減少したが、やがて再びマグマが溜まり始め地下の質量が増加し始めると重力も共に増加していったと考えることができる。